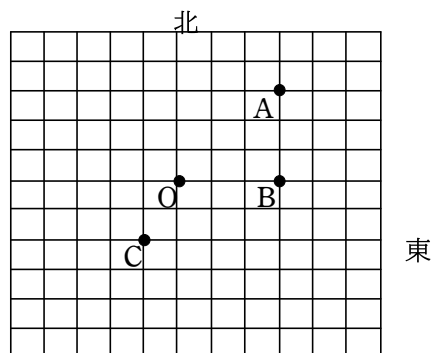


- 1 右図のように東西南北に道路が碁盤目状になった街がある。
図の直線部分は道路を表し、交差点の間隔は東西南北どの方向にも 10m である。交差点から交差点への移動は道路を通らずにはいけないものとし、道路の幅については考えなくてもよいものとする。交差点 P から交差点 Q までの最短距離を単に距離ということにし、記号で $d(P, Q)$ と表すことにする。



例えば、交差点 O と交差点 A の距離は、

$$d(O, A) = d(O, B) + d(B, A) = 30 + 30 = 60$$

となるので、60m である。ただし、2つの交差点が一致した場合の交差点間の距離は 0 とする。例えば交差点 A では $d(A, A) = 0$ である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 交差点 O から交差点 B, 交差点 C までの距離を比較したとき、次のア～ウで正しいものを選び。
ア 交差点 B の方が、交差点 C よりも交差点 O に近い。
イ 交差点 C の方が、交差点 B よりも交差点 O に近い。
ウ 交差点 B も交差点 C も交差点 O からの距離は等しい。
- (2) 交差点 B と交差点 C の距離 $d(B, C)$ を求めよ。
- (3) 交差点 O から交差点 A へ移動する途中に交差点 D を経由することにする。このとき、 $d(O, A) = d(O, D) + d(D, A)$ が成り立つような交差点 D はいくつあるか答えよ。ただし、該当する交差点 D として、交差点 O と交差点 A は除くものとする。
- (4) $d(O, E) = 50$ となる交差点 E はいくつあるか答えよ。
- (5) $d(O, F) \leq 50$ となる交差点 F はいくつあるか答えよ。

解答例

- (1) $d(O, B) = 30$, $d(O, C) = 10 + 20 = 30$ だから、 $d(O, B) = d(O, C)$ よって、ウ

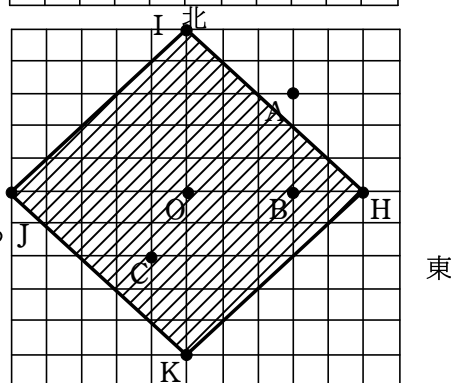
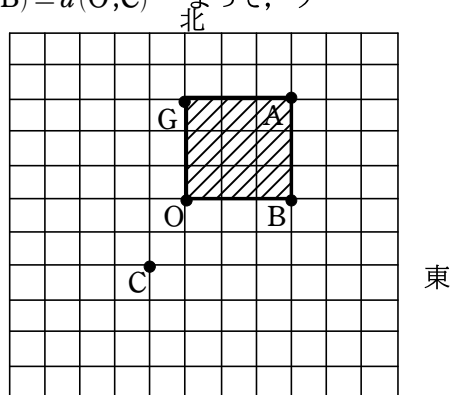
- (2) $d(B, C) = 40 + 20 = 60$ よって、60m

- (3) 交差点 O から真北に 30m 進んだ位置にある交差点を G とすると、D は正方形 OBAG の内部および辺上にある。この中にある交差点の数は $4 \times 4 = 16$ であるが、2つの交差点 O と A は除くので $16 - 2 = 14$ よって、14 個

- (4) 交差点 O から真東に 50m 進んだ位置にある交差点を H, 真北に 50m 進んだ位置にある交差点を I, 真西に 50m 進んだ位置にある交差点を J, 真南に 50m 進んだ位置にある交差点を K, とする。

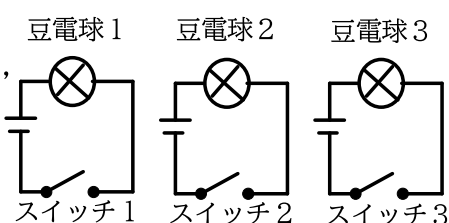
$d(O, E) = 50$ となる交差点 E は正方形 HIJK の周上にある。辺 HI 上の交差点は 6 個あるので、 $6 \times 4 = 24$ そのうち、交差点 H, I, J, K は 2 回数えているので、 $24 - 4 = 20$ よって、20 個

- (5) $d(O, F) \leq 50$ となる交差点 F は正方形 HIJK の内部および周上にある。(4) より $d(O, F) = 50$ となる交差点 F の個数は 20, $d(O, F) = 40$ は $5 \times 4 - 4 = 16$, $d(O, F) = 30$ は $4 \times 4 - 4 = 12$, $d(O, F) = 20$ は $3 \times 4 - 4 = 8$, $d(O, F) = 10$ は $2 \times 4 - 4 = 4$, $d(O, F) = 0$ は 1 となるので $20 + 16 + 12 + 8 + 4 + 1 = 61$ よって、61 個



- 2 右図のようにスイッチによって豆電球の点灯・消灯が切り替えられる回路が3つある。豆電球が点灯している状態を「1」、消灯している状態を「0」の2種類の数字で表すことにする。

例えば、スイッチがすべて OFF で豆電球が 3 個とも消灯の状態にあれば、数字表現は 000 となり、スイッチ 1 とスイッチ 3 が ON でスイッチ 2 が OFF の場合の数字表現は 101 となる。このとき、次の問いに答えよ。



- (1) 3 個のスイッチがすべて ON のときの数字表現を答えよ。
- (2) 3 個のスイッチの ON・OFF の切り替えによってできる 000 や 101 などの数字表現は、全部で何通りあるか。
- (3) (2) で得られた数字表現の場合の数が m 通りになったとする。 m 個の数字表現を通常の 3 桁の整数とみなし、小さい順に並べる。ただし、000 は 0, 001 は 1, 010 は 10, 011 は 11 と考える。例えば、一番小さい数字表現は 000 で、2 番目に小さい数字表現は 001 である。また一番大きな数字表現は 111 である。このとき、101 は何番目に小さい数字表現か。
- (4) 豆電球の回路を 2 つ 4 番目、5 番目に追加し、同様に数字表現を考える。さらに、(3) と同様に数字表現を小さい順に並べた。このとき、一番小さい数字表現は 00000 で、これに整数 0 を対応させる。2 番目に小さい数字表現は 00001 で、これに整数 1 を対応させ、3 番目に小さい数字表現は 00010 で、これに整数 2 を対応させる。以下、同様に n 番目に小さい数字表現に対して整数 $n-1$ を対応させる。($n=1,2,\dots,32$) このような対応を定めたとき、数字表現 01000 が対応する整数を求めよ。
- (5) (4) のとき、整数 20 に対応する数字表現を求めよ。

解答例

- (1) 111
- (2) すべての数字表現は次の通りである。000 001 010 011 100 101 110 111
よって、8 通り
- (3) (2) の数字表現の列は小さい順にならべてあるので、101 は 6 番目に小さい数字表現ある。
- (4) 数字表現 01000 より小さい数字表現は $00\square\square\square$ ($\square$ には 1 または 0 が入る) という形をしている。(2) より、数字表現が三桁の場合は 8 通りである。したがって、数字表現 01001 は 9 番目に小さい数字表現となる。よって、対応する整数は $9-1=8$ である。
- (5) 整数 20 は 21 番目の数字表現が対応したものである。
 $0\triangle\square\square\square$ ($\triangle, \square$ には 1 または 0 が入る) という数字表現は $\square\square\square$ の形が 8 通りで $\triangle$ が 2 通りなので、 $8 \times 2 = 16$ 通り。よって、数字表現 10000 は 17 番目に小さい数字表現である。同様に、01000 は 9 番目、00100 は 5 番目、00010 は 3 番目、00001 は 2 番目の数字表現である。
 $21 = 16 + 5$ であるので、21 番目に小さい数字表現は 10100 である。
よって、10100